EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta **….084**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{1+i}{2-3i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(-1,-2,3)$ la planul $x+y+z-5=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2+3y^2=4$ dusă prin punctul $P(1,1)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(-1,2,0)$, $M(-2,3,0)$ şi $N(-3,4,0)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,3)$, $B(1,3,1)$, $C(3,1,1)$ şi $D(-1,-2,3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2+i)^3=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 1 şi rația este 2 , să se calculeze termenul al zecelea .

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^2=\hat{x}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)+g(2)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+4^x=6$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f=X^3-X-24$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+\sin x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^3 + 3X + 3$.

(4p) **a)** Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raţionale .

(4p) **b)** Să se arate că polinomul f are o singură rădăcină reală.

Notăm cu $a \in \mathbf{R}$ unica rădăcină reală a polinomului f şi cu $\mathbf{Q}(a) = \{g(a) \mid g \in \mathbf{Q}[X]\}$.

(4p) **c)** Să se verifice că $0 \in \mathbf{Q}(a)$ şi $1 \in \mathbf{Q}(a)$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}(a)$, atunci $\alpha + \beta \in \mathbf{Q}(a)$ şi $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{Q}(a)$.

(2p) **e)** Să se arate că $\mathbf{Q}(a) = \{p + qa + ra^2 \mid p, q, r \in \mathbf{Q}\}$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $p, q, r \in \mathbf{Q}$ şi $p + qa + ra^2 = 0$, atunci $p = q = r = 0$.

(2p) **g)** Să se arate că $a^{2007} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $a \geq 0$, $I_0(a) = \int_0^a \sin'(x)dx$ şi $I_n(a) = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} \sin^{(n+1)}(x)dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

unde prin $\sin^{(n)}$ am notat derivata de ordin n a funcţiei $\sin$.

(4p) **a)** Să se verifice că $I_0(a) = \sin a$, $\forall a \geq 0$.

(4p) **b)** Utilizând metoda integrării prin părţi să se arate că

$$I_n(a) = -\frac{a^n}{n!}\sin^{(n)}(0) + I_{n-1}(a), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ şi } \forall a \geq 0.$$

(4p) **c)** Utilizând metoda inducţiei matematice să se arate că

$$\sin a = \sin 0 + \frac{a}{1!}\sin'(0) + \frac{a^2}{2!}\sin^{(2)}(0) + \ldots + \frac{a^n}{n!}\sin^{(n)}(0) + I_n(a), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ şi } \forall a \geq 0.$$

(2p) **d)** Să se arate că $0 \leq |I_n(a)| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ şi $\forall a \geq 0$.

(2p) **e)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x \geq 0$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n(a) = 0$, $\forall a \geq 0$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.